q-擬凸な複素Lie群について(Cousin問題について)

風間, 英明

数理解析研究所講究録
141巻 1972年 32-46

q-擬凸な複素Lie群について

九大理　風間英明

松島与三と森本明彦[4]は複素Lie群がStein群になるための必要十分条件を明らかにした。他方Andreotti and Grauert[1]は擬凸性の拡張概念である，q-擬凸性，さらにq-完備性について，詳しく研究した。実はStein多様体と0-完備な多様体とは全く同じである。この講演では，q-擬凸な複素Lie群についての性質を若干調べてみたい。

§1．準備．

この節で述べる結果は，松島与三と森本明彦[4]，さらに森本明彦[5]において，すでに証明された事であるから，証明なしで述べる。

<u>定義1.1.</u> 複素Lie群が，複素多様体としてみたときに，Stein多様体になるとき，Stein群と云うことにする。

Stein群になるための必要十分条件は次によって明らかに

される。

定理1.2．複素Lie群Gに対して次の(1)〜(6)は同値である。

(1)．GはStein群である。

(2)．Gの中心はStein群である。

(3)．Gの中心の単位元を含む連結成分は複素Lie群として $\mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^{*m}$, $m, l \geq 0$, に同型である。

(4)．Gの極大コンパクト部分群Kに対して，そのLie環を $\mathfrak{k}$ とおくと，

$$\mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k} = \{0\}$$

となる。

(5)．GはGの大域的な正則函数によって分離される。すなわち，$x, y \in G$ $(x \neq y)$ とすると $f \in H^0(G, {}_G\mathcal{O})$ が存在し，$f(x) \neq f(y)$ を満足する。

(6)．Gの各点での局所座標はG上の大域的正則函数によって与えられる。すなわち，Gの任意の点 x に対して，$F \in H^0(G, {}_G\mathcal{O})^n$, $n = \dim_{\mathbb{C}} G$, が存在し，Fは x でGの局所座標を与える。

松島与三と森本明彦はこの定理1.2.を用いて，「底とfibreがStein多様体なるfibre bundleはStein多様体になるか」，と云うSerreの与えた問題に肯定的に答えた。この結果は

必要なので次に述べる。

<u>定理1.3.</u> Serreの問題は次の場合に解ける。

(1). 構造群が連結のとき。

(2). 主fibre bundleのとき。

森本明彦[5]は任意の連結複素Lie群Gに対して、G/G^0がStein群となるような、最小の閉且つ正規な、複素Lie部分群G^0が存在することを示した。さらに森本明彦[5]は、non-compact複素Lie群で、大域的な正則函数が定数しか存在しない例を作った。一方G^0も、大域的な正則函数は定数しか存在しない。したがって部分群G^0は限らずしもコンパクトとは限らない。次の補題1.4により、G^0及びその性質が明らかになる。詳しい証明は森本明彦[5]にまかせることにして、ここでは簡単な証明を与えるのみで済ます。

<u>補題1.4.</u> 連結複素Lie群Gに対して、

$$G^0 = \{a \in G ; f(a) = f(e) \text{ for all } f \in H^0(G, {}_G\mathcal{O})\}$$

とおく，但しeはGの単位元を表わす。そのときG^0は次の(1)から(6)迄の性質をもつ。

(1). G^0は閉且つ正規な複素Lie部分群である。

(2). G/G^0はStein群である。

(3). もし閉且つ正規な複素Lie部分群Nで、G/NがStein群とな

るものが存在すれば，$G^0 \subset N$ をみたす。(最小性)

(4). G^0 は連結である。

(5). G^0 は G の中心に含まれる。したがって特に可換である。

(6). G^0 上正則な函数は定数に限る。

<u>証明</u>. (1) $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^0$ をそれぞれ G, G^0 の Lie 環とする。このとき $\mathfrak{g}^0$ が $\mathfrak{g}$ の複素 Lie 部分環であることを示す。今 $X \in \mathfrak{g}^0$ とし $Y = \sqrt{-1}X \in \mathfrak{g}$ とおく。V を複素平面 $\mathbb{C}$ の原点 0 の十分小さな連結近傍とする。そのとき $\varphi : V \longrightarrow G$ を

$$\varphi(x+\sqrt{-1}y) = \exp xX \exp yY \qquad (x+\sqrt{-1}y) \in V$$

で与えると，φ は正則写像である。そこで $f \in H^0(G, {}_G\mathcal{O})$ に対して，

$$f_0(x+\sqrt{-1}y) = f(\exp xX \exp yY)$$

とおくと，f_0 は V 上の正則函数であり，$X \in \mathfrak{g}^0$ より，$\exp xX \in G^0$ だから $f_0(x) = f_0(0)$，よって一致の定理により $f_0(z) = f_0(0)$ $z \in V$ を得る。したがって

$$f(\exp yY) = f(e) \quad \text{for all } f \in H^0(G, {}_G\mathcal{O})$$

これは $Y \in \mathfrak{g}^0$ となることを示す。

(2). $\pi : G \longrightarrow G/G^0$ を自然な射影とする。π は，全射，

$$\pi_* : H^0(G, {}_G\mathcal{O}) \longrightarrow H^0(G/G^0, {}_{G/G^0}\mathcal{O})$$

をひき起す。これより $H^0(G/G^0, {}_{G/G^0}\mathcal{O})$ は G/G^0 の点を分離することがわかり，定理 1.2.(5) より G/G^0 が Stein 群となる。

(3). $\hat{\pi}$ を G から G/N への自然な射影としておく。もし $a \notin N$

ならば，仮定より $\hat{f} \in H^0(G/N, {}_{G/N}\mathcal{O})$ が存在し，

$$\hat{f}(\hat{\pi}(a)) \neq \hat{f}(\hat{\pi}(e))$$

となる。したがって $f = \hat{f} \circ \hat{\pi} \in H^0(G, {}_G\mathcal{O})$ とおくことにより，$a \notin G^0$ となることがわかる。つまり $G^0 \subset N$ 。

(4)．G_c^0 を G^0 の単位元を含む連結成分とする。そうすると，G/G_c^0 は G/G^0 の被覆群であり，G/G^0 は Stein 群であるから，K. Stein [7] の結果から，G/G_c^0 はやはり Stein 群となる。よって (3) より，$G^0 = G_c^0$ を得る。

(5)．Z を G の中心とする。G の随伴表現を考えることにより G/Z は複素線型 Lie 群となる。したがって松島－森本[4]の結果より，G/Z は Stein 群となる。よって $G^0 \subset Z$ 。

(6)．$(G^0)^0 = \{a \in G^0 ; f(a) = f(e) \text{ for all } f \in H^0(G^0, {}_{G^0}\mathcal{O})\}$

とおくと，$(G^0)^0$ は G の閉且つ正規な複素 Lie 部分群となることがわかる。又，$G/(G^0)^0$ は底を G/G^0，構造群を $G^0/(G^0)^0$ とする，主 bundle と考えられる。よって定理1.3.(2)より $G/(G^0)^0$ はやはり Stein 群となり，$G^0 = (G^0)^0$ となる。

q. e. d.

定理1.8.（[5]. Th. 2）．補題1.4. と同じ仮定の下で，次の (1)～(3) の条件は同値である。

(1)．G は正則凸である。

(2)．G^0 はコンパクトである。

(3). $\mathfrak{k}$ を G の極大コンパクト部分群 K の $\mathcal{L}ie$ 環とするとき,

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$$

但し, $\mathfrak{g}^0$ は G^0 の $\mathcal{L}ie$ 環とする。

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2). G^0 を非コンパクトと仮定する。G^0 の定義から, e を G の単位元とすると, コンパクト集合 $\{e\}$ の正則凸被 $\widehat{\{e\}}$ は丁度 G^0 となる。したがって G は正則凸でない。

(2) $\Longrightarrow$ (1). G は底を G/G^0, fibre を G^0 とする主 bundle と考えてよい。G/G^0 は Stein 群であり, 仮定より G^0 はコンパクト, よって G は正則凸となる。

(2) $\Longrightarrow$ (3). Z を G の中心とする。そして, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{z}$ をそれぞれ G, Z の $\mathcal{L}ie$ 環とする。そこで

$$\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$$

とおき, K_0 を $\mathcal{L}ie$ 環 $\mathfrak{k}_0$ をもつ G の複素 $\mathcal{L}ie$ 部分群とする。そうすると, $K_0 \subset K$, よって $K_0 \subset Z$ となる。(詳しくは [5]) したがって K_0 は連結可換群だから, その普遍被覆群は $\mathbb{C}^m$ としてよい。 $\exp : \mathbb{C}^m \longrightarrow K_0$ $m = \dim_{\mathbb{C}} K_0$ 。そこで任意の $f \in H^0(G, {}_G\mathcal{O})$ に対して $f_0 = f|K_0$ とし, $\tilde{f} = f_0 \circ \exp$ とすると $\tilde{f} \in H^0(\mathbb{C}^m, {}_{\mathbb{C}^m}\mathcal{O})$ 且つ $K_0 \subset K$ なることより, f_0 は K_0 上有界, よって $\tilde{f}$ も $\mathbb{C}^m$ 上有界. したがって $\tilde{f}$ は定数, よって $f_0 \equiv$ 定数となる。すなわち $K_0 \subset G^0$, つまり $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{g}^0$ を得る。他方, G^0 がコンパクトだから, G の極大コンパクト部分群 K_1

が存在し，$G^0 \subset K_1$，すなわち $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{k}_1$ をみたす。ここで K_1 の Lie 環を $\mathfrak{k}_1$ とおいた。よって $\mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{k}_1 \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}_1$ となるが，前半と同じ理由で，$\mathfrak{k}_1 \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{g}^0 \subset \mathfrak{g}$ となる。よって，$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{k}_1 \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}_1$ を得る。一方 K_1 と K の共役性より $\mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}_1$ となる。したがって $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$．

(3) $\Longrightarrow$ (2). $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$ と仮定すると，$G^0 \subset K$．一方 G^0 は G で閉，K はコンパクトだから，G^0 もコンパクトになる。

q.e.d.

§2. q-擬凸，q-完備性について

定義 2.1. M を複素多様体とし，$\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ を C^∞-class の函数とするとき，φ が M の開集合 D で強 q-多重劣調和であるとは，D の任意の点 x と x での局所座標 $(z_1, \cdots\cdots, z_n)$ に対して，φ の x に於ける Levi-形式

$$L(\varphi, x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \xi^i \bar{\xi}^j, \quad (\xi^1, \cdots, \xi^n) \in \mathbb{C}^n$$

が少くとも $n-q$ 个の正の固有値をもつことである。

さらに複素多様体 M が q-擬凸であるとは，C^∞-class の函数 $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ と M の compact 集合 K が存在して，φ は $M-K$ で強 q-多重劣調和，且つ任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$B_c = \{x \in M : \varphi(x) < c\}$$

は M で相対 compact 集合となることとする。

さらにMがqー完備であるとは，qー擬凸であって，$K=\phi$とすることが出来ることとする。又このとき，後の便宜のため，Mがqー完備であるが，$q-1$完備でないとき，特に，Mは丁度qー完備であると云うことにする。

次の定理はqー擬凸多様体に関する基本的結果である。証明については Andreotti and Grauert [1]。

<u>定理2.2</u>. 複素多様体MとM上の任意の解析的連接層$\mathcal{F}$に対して，次の(1),(2)，が成り立つ。

(1) Mがqー擬凸ならば，$H^k(M, \mathcal{F})$は$k \geq q+1$のとき有限次元である。

(2) Mがqー完備ならば，$H^k(M, \mathcal{F})=0 \quad k \geq q+1$。

Levi の問題に対する Narasimhan [6] の結果から次が得られる。

<u>定理2.3</u>. 複素多様体Mに対して，Mが0ー完備であることと，Stein 多様体であることとは同値である。

§1. における森本，松島ー森本の結果から，複素 Lie 群が正則凸のときは，qー完備な複素 Lie 群の性質が簡単に調べられる。そのために複素 Lie 群のよく知られた性質につ

いて以下において調べよう。

Gを次元nの複素Lie群とする。さらにHをGの閉且つ正規な、次元qの複素Lie部分群とする。Gの標準座標の性質より、次のようなことが云える。UをGの単位元eの近傍、$(z_1, \dots, z_n)$をUにおける標準座標とする。このとき、

$$U_1 = \{x \in U : z_1(x) = \cdots = z_q(x) = 0\}$$
$$U_2 = \{x \in U : z_{q+1}(x) = \cdots = z_n(x) = 0\}$$

とおくと、$U = U_1 \cdot U_2$, $U \cap H = U_2$, $U_1 \cap U_2 = \{e\}$, $U \cdot H = U_1 \cdot H$ 且つ $U_1^{-1} \cdot U_1 \cap H = \{e\}$ を満たす。$\pi : G \longrightarrow G/H$ を自然な射影とする。そうするとGの点列$\{a_\nu\}$があって$\{\pi(a_\nu U_1)\}$はG/Hのlocal finiteな開被覆となる。このとき、任意の$\pi(g) \in \pi(a_\nu U_1)$に対し、一意的に$x \in U_1$が存在し、$\pi(g) = \pi(a_\nu x)$となる。そこで、$\pi(g) = \pi(a_\nu x_\nu) = \pi(a_\mu x_\mu)$, $x_\nu, x_\mu \in U_1$のとき$\Phi_{\nu\mu}(\pi(g)) = (a_\nu x_\nu)^{-1}(a_\mu x_\mu)$とおく。そうすると、

$$\Phi_{\nu\mu} : \pi(a_\nu U_1) \cap \pi(a_\mu U_1) \longrightarrow H$$

なる正則写像が作られる。さらに、

$$\{\Phi_{\nu\mu}\} \in Z^1(\{\pi(a_\nu U_1)\}, \mathfrak{O}_H)$$

となる。ここで$\mathfrak{O}_H$はHへの正則写像芽の作るG/H上の層を表わす。そこで1-cocycle $(\{\pi(a_\nu U_1)\}, \{\Phi_{\nu\mu}\})$によって、一意的に定められる、主bundle over G/Hを$P(G/H, H, \pi)$と表わすと、全空間PはGに解析的に

同型となる。全く同様に、Gが実Lie群のとき、Gは、G/Hを底、構造群をHとする主bundleにC^∞ class 同型となる。

上の事実に注意すると次がすぐにわかる。

<u>命題2.4.</u> Gを正則凸な次元nの複素Lie群とする。このとき、$G^0=\{a\in G:\ f(a)=f(e)\ \text{for all}\ f\in H^0(G,{}_G\mathcal{O})\}$

とすると、次の(1)〜(3)は同値である。

(1). Gは丁度q-完備である。

(2). $\dim G^0=q$

(3). Gの極大コンパクト部分群をKとする。さらに$\mathfrak{k}$をKのLie環とすると、$\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{k}\cap\sqrt{-1}\mathfrak{k}=q$.

<u>証明</u>. 森本の結果定理1.8.より、(2)$\Longleftrightarrow$(3)はすぐにわかる。又$G\cong P(G/G^0, G^0, \pi)$であることと$G^0$がコンパクトであること、さらに$G/G^0$がStein群、つまり0-完備であることに注意して、強q-多重劣調函数に対しても最大値の原理がなり立つので、証明は明らかとなる。詳しい証明は略す。

q.e.d.

§3. Stein多様体上の主fibre bundleについて

この節の目的は次の定理を示すことである。

<u>定理3.1.</u> XをStein多様体、Gを連結な複素Lie群とする。さらに$P(X,G,\pi)$をX上の構造群Gをもつ任意の主fibre bundleとする。このとき$\dim_{\mathbb{C}} G^0=q$であれば、全空

同 P は qー完備となる。

<u>証明</u>. $\dim_{\mathbb{C}} G = n$, $\dim_{\mathbb{C}} X = m$, $\dim_{\mathbb{C}} G^0 = q$ とする。今 $P(X, G, \pi) = (\{W_\alpha\}, \{F_{\alpha\beta}\})$, 但し, $\{W_\alpha\}$ は X の局所有限な開被覆, $\{F_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\{W_\alpha\}, \mathcal{O}_G)$ とする。また G を, 底 G/G^0, 構造群 G^0 とする主 bundle にみなしたとき, $G(G/G^0, G^0, \pi_0) = (\{\pi_0(a_\nu U_1)\}, \{\Phi_{\nu\mu}\})$ とする, この記号は §2 と同じものとする。底 X, 構造群 G/G^0 の主 bundle, $P_1(X, G/G^0, \pi_1) = (\{W_\alpha\}, \{\pi_0 \circ F_{\alpha\beta}\})$, さらにこの P_1 を底, G^0 を構造群とする主 bundle

$$P_2(P_1, G^0, \pi_2) = (\{O_{(\alpha,\nu)}\}, \{\Psi_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)}\})$$

ここで, $O_{(\alpha,\nu)} = W_\alpha \times \pi_0(a_\nu U_1) \subset \pi_1^{-1}(W_\alpha)$, 且つ $\Psi_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)} = (a_\nu \chi_\nu)^{-1} \circ F_{\alpha\beta} \circ (a_\mu \chi_\mu)$ とする, を考えると, 自然に

$P(X, G, \pi)$ は $P_2(P_1, G^0, \pi_2)$ に両正則的に同型となる。一方, 補題 1.4. より, G^0 は連結可換であるから, $2q$ 次元の実 Lie 群とみなしたとき, $T^l \times R^s$ $(l+s=2q)$, T は実1次元 torus, と実 Lie 群として同型である。したがって $P_2(P_1, G^0, \pi_2)$ は C^∞-class 主 bundle として $P_3(P_4, R^s, \pi_3)$ と同型である, 但し $P_4 = P_4(P_1, T^l, \pi_4)$ は $P_2(P_1, G^0, \pi_2)$ からひき起こされる, 底 P_1, 構造群 T^l の C^∞-class 主 bundle とする。R^s を構造群とする bundle は常に trivial である。すなわち

$$\Psi_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)} = (\Omega_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)}, \Lambda_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)})$$

$$\Omega_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)} : O_{(\alpha,\nu)} \cap O_{(\beta,\mu)} \xrightarrow{C^\infty} T^d$$

$$\Lambda_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)} : O_{(\alpha,\nu)} \cap O_{(\beta,\mu)} \xrightarrow{C^\infty} R^s$$

とすると，$\Lambda_{(\alpha,\nu)} : O_{(\alpha,\nu)} \xrightarrow{C^\infty} R^s$ が存在して，

$$\Lambda_{(\alpha,\nu)(\beta,\mu)} = \Lambda_{(\beta,\mu)} - \Lambda_{(\alpha,\nu)} \quad \text{on } O_{(\alpha,\nu)} \cap O_{(\beta,\mu)}$$

が成り立つ。この $\{\Lambda_{(\alpha,\nu)}\}$ を用いて，C^∞-class 主 bundle の同型 $\iota : P_3(P_4, R^s, \pi_3) \longrightarrow P_4 \times R^s$ が作られる。そこで，R 上の C^∞-class 函数 $\lambda(x)$ で，$[-a, a]$ 上で 1，$R-(-a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ で 0 となる $0 \leqq \lambda \leqq 1$ を考える，但し $a, \varepsilon > 0$。そして

$$\gamma(x) = |x|(1-\lambda(x))$$

とおくと，$\gamma \in C^\infty(R)$，且つ $\gamma(x) = |x|$; x が十分大のとき，となる。そこで $P_4 \times R^s$ 上の C^∞-class の写像を

$$\gamma_s(p_4, (t^1, \cdots, t^s)) = \sum_{k=1}^{s} \gamma(t^k) \qquad (p_4, (t^1, \cdots, t^s)) \in P_4 \times R^s$$

で定義する。これにより C^∞-class の写像

$$\gamma_s \circ \iota : P_2(P_1, G^0, \pi_2) \longrightarrow [0, \infty)$$

が作られる。必要ならば P_1 の被覆 $\{O_{(\alpha,\nu)}\}$ を細分することにより，$O_{(\alpha,\nu)}$ で局所座標 $(z_1^{(\alpha,\nu)}, \cdots, z_{m+n-q}^{(\alpha,\nu)})$ が存在し，

$$\sup_{\substack{p_2 \in \pi^{-1}(O_{(\alpha,\nu)}) \\ 1 \leq i,j \leq m+n-q}} \left| \frac{\partial^2(\gamma_s \circ \iota)}{\partial z_i^{(\alpha,\nu)} \partial \bar{z}_j^{(\alpha,\nu)}}(p_2) \right| < C_{(\alpha,\nu)} < +\infty$$

と出来る，ことは γ_s の作り方より，明らかである。一方 $P_1 = P_1(X, G/G^0, \pi_1)$ は 定理 1.3.(2) 及び 補題 1.4.(2) よ

り Stein 多様体で，定理2.3.より 0−完備である。したがって，強 0−多重劣調和函数 $\varphi: P_1 \longrightarrow [0,\infty)$ で $\{\varphi < c\}$ が P_1 で相対コンパクト（$c \in [0,\infty)$）となるものがある。そこで $\chi: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ を C^∞−class の凸増加な函数とし，$\Phi: P \longrightarrow [0,\infty)$ を $\Phi = \chi(\varphi \circ \pi_2) + \lambda_3 \circ \tau$ で定義すると，$\chi'(x)$ が十分大きくなるように取っておくと $\mathcal{L}(\Phi, x)$ は P の各点 x で $n+n-g$ 個の正の固有値をもつように出来る。さらに，任意の $c \in [0,\infty)$ に対して，

$$B_c = \{\Phi < c\}$$

が相対コンパクトなることも明らかである。よってこの Φ により $P = P_2(P_1, G^0, \pi_2)$ が g−完備となる。

q. e. d.

この定理によりすぐに次が得られる。

<u>系.3.2.</u> G を複素 Lie 群とするとき，もし $\dim_{\mathbb{C}} G^0 = g$ ならば，G は g−完備である。

<u>証明</u>．定理3.1.において $X = 1$点 とればよい。

§4. 複素 Lie 群の g−擬凸性について

Grauert（[3] p.347）は「第Ⅱ可算公理を満足する，次元 n の複素空間は，常に $(n-1)$-擬凸になるであろう。」と予想しているが，複素 Lie 群に対してこの予想が正しいこ

とをこの節で明らかにする。

定理4.1. 次元nの任意の複素Lie群Gは$(n-1)$−擬凸である。特にGが非コンパクトならば$(n-1)$−完備である。

証明. Gがコンパクトならば，0−擬凸だから，$(n-1)$−擬凸となる。したがってGが非コンパクトのとき$(n-1)$−完備であることを証明する。Gの各連結成分は両正則的に同型だから，Gは連結として証明してよい。もし$G^0 \subsetneq G$ならば，$\dim_C G^0 \leq n-1$となるから，系3.2.よりGは$(n-1)$−完備となる。したがって$G=G^0$のとき$(n-1)$−完備となることを示せばよい。このときGの極大コンパクト部分群をK，そのLie環をkとすると，Gが非コンパクトなることから，$\dim_C k\cap\sqrt{-1}k<n$となる。さらにGが連結可換であることからGは複素Lie群としてC^n/Γ，但しΓはC^nのdiscrete部分群，に同型となる。したがって，この事実と$G=G^0$から，実はG^0は$\dim_C k\cap\sqrt{-1}k$−完備となることが云えるのである。くわしい証明はここではしない。

系4.2. 次元nの任意の複素Lie群Gと，G上の解析的連接層$\mathcal{F}$に対して，$\dim H^n(G,\mathcal{F})<+\infty$，特に$G$が非コンパクトならば，$H^n(G,\mathcal{F})=0$が成り立つ。

引用文献

[1] A. Andreotti and H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90(1962), 193-259.

[2] H. Grauert, Une notion de dimension cohomologique dans la theorie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 87(1959), 341-350.

[3] H. Kazama, q-Complete complex Lie groups and holomorphic fibre bundles over a Stein manifold, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 26-1(1971), 131-147.

[4] Y. Matsushima and A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. Math. France, 88(1960), 137-155.

[5] A. Morimoto, Non-compact complex Lie groups without non-constant holomorphic functions, Proc. Conf. Complex Analysis, Minneapolis, 1965, 256-272.

[6] R. Narsimhan, The Levi problem for complex spaces, Math. Ann. 142(1961), 355-365.

[7] K. Stein, Überlagerungen holomorphvollständiger komplexen Räume, Arch. Math., 7(1956), 354-361.